SESIÓN 7

FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

I. CONTENIDOS:

1. Ejercicios resueltos (II) cont.(funciones algebraicas)
2. Ejercicios propuestos (funciones algebraicas)
3. Funciones crecientes y decrecientes
4. Ejercicios resueltos
5. Estrategias Centradas en el Aprendizaje: Ejercicios propuestos

II. OBJETIVOS:

Al término de la Clase, el alumno:

- Derivará funciones algebraicas aplicando la regla general y las fórmulas
- Comprenderá cuando y porque una función es creciente o decreciente

III. PROBLEMATIZACIÓN:

Comenta las preguntas con tu Asesor y selecciona las ideas más significativas.

- ¿Qué ventajas hay al usar fórmulas para derivar una función?
- ¿Por qué es importante saber en qué intervalos una función es creciente o decreciente?

IV. TEXTO INFORMATIVO-FORMATIVO:

1.1. Ejercicios resueltos (II) cont.(funciones algebraicas)

3. Aplicando la regla de los cuatro pasos encuentre la derivada de la función $y = \frac{c}{x^2}$

(1) $y + \Delta y = \frac{c}{(x+\Delta x)^2}$

(2) $y + \Delta y = \frac{c}{(x+\Delta x)^2}$

$-y \quad = \frac{c}{(x+\Delta x)^2} - \frac{c}{x^2}$

$$\Delta y = \frac{c}{(x+\Delta x)^2} - \frac{c}{x^2} = \frac{-c\Delta x(2x+\Delta x)}{x^2(x+\Delta x)^2}$$

(3) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -c\,\frac{2x+\Delta x}{x^2(x+\Delta x)^2}$

(4) $\frac{dy}{dx} = -c\,\frac{2x}{x^2(x)^2} = -\frac{2c}{x^3}$ cuando en el segundo miembro de la igualdad hacemos $\Delta x \to 0$

Aplicando la(s) fórmula(s) correspondiente(s) obtenga la derivada de las siguientes funciones algebraicas

1. $y = x^3$

Aplicando el caso especial de la fórmula 6 (lección anterior) tenemos:

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3) = 3(\,x^{3-1})\frac{d}{dx}(x) = 3(x^2)(1)$ $\therefore$ $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ Que es la derivada buscada

2. $y = x^4 + 5$

Aplicando el caso especial de la fórmula 6 y la fórmula 1 tenemos:

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4) + \frac{d}{dx}(5) = 4(x^{4-1}) + 0 = 4x^3$ $\therefore$ $\frac{dy}{dx} = 4x^3$ Que es la derivada buscada

3. $y = 2x^2 + 4x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(2x^2) + \frac{d}{dx}(4x) = 2(2)(x^{2-1}) + 4\frac{dx}{dx} = 4x + 4(1) = 4x + 1$ $\therefore$ $\frac{dy}{dx} = 4x + 1$

4. Encuentre la derivada de la función $y = (3 - x^2)^7$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(3 - x^2)^7 = 7(\,3 - x^2)^{7-1}\frac{d}{dx}(3 - x^2) = 7(\,3 - x^2)^6\left[\frac{d}{dx}(3) - \frac{d}{dx}(x^2)\right] = 7(3 - x^2)^6(0 - 2x)$

$\therefore$ $\frac{dy}{dx} = -14x\,(3 - x^2)^6$ Que es la derivada buscada

5. Encuentre la derivada de la función $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ siendo *"a"* una constante

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dy}\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right) = \frac{d}{dx}\,(\mathrm{a}^2 - \mathrm{x}^2)^{1/2} = \frac{1}{2}\,(\mathrm{a}^2 - \mathrm{x}^2)^{-1/2}\frac{d}{dx}(a^2 - x^2) = \frac{1}{2}\,(a^2 - x^2)^{-1/2}(0 - 2x)$$
$$= -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Recuerde de sus lecciones de álgebra que una raíz es equivalente a un exponente fraccionario y que un exponente negativo es equivalente a su recíproco.

6. Encuentre la derivada de la función $y = \sqrt[3]{3x^2} - \frac{1}{\sqrt{5x}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt[3]{3x^2}\text{-}\frac{1}{\sqrt{5x}} = \frac{d}{dx}\,(3x^2)^{1/3} - \frac{d}{dx}\,(5x)^{-1/2} = \frac{1}{3}\,(3x^2)^{-2/3}\,\frac{d}{dx}(3x^2) - (-\frac{1}{2})\frac{d}{dx}(5x)^{-3/2} =$

$\frac{1}{3}\,(\,3x^2)^{-2/3}(6x) - \left(-\frac{1}{2}\right)(5x)^{-3/2}(5) = \frac{2x}{(9\,x^4)^{1/3}} + \frac{5}{2(5x)(5x)^{1/2}} = \frac{2}{\sqrt[3]{9x^4}} + \frac{1}{2x\sqrt{5x}}$ Que es la derivada buscada

2.1. Ejercicios propuestos (funciones algebraicas)

1. $y = x^5 + 5x^4 + 10x^2 + 6$

2. $y = 3x^{1/2} - x^{3/2} + 2x^{-1/2}$

3. $y = 3x^4 - 2x^2 + 8$

4. $y = 4 + 3x - 2x^3$

5. $y = ax^5 - 5bx^3$ Siendo a y b constantes

6. $y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^7}{7}$

7. $y = \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}$

8. $y = 2x^{3/4}4x^{-1/4}$

3.1. Funciones crecientes y decrecientes: Una función $y = f(x)$ se dice que es *creciente si* y *aumenta* (algebraicamente) cuando x aumenta. Por otro lado una función $y = f(x)$ se la llama *función decreciente* si y disminuye (algebraicamente) cuando x aumenta.

Al graficar una función podemos determinar si ésta es creciente o decreciente, a modo de ejemplo consideremos la gráfica anexa:

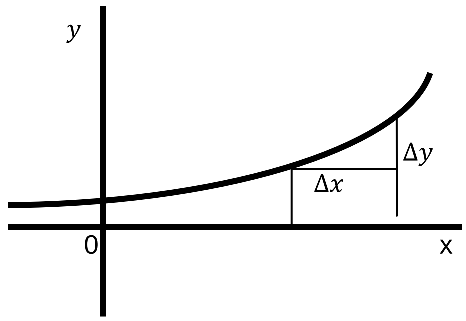

Fig. 1

Si recorremos un punto a lo largo de la gráfica de izquierda a derecha la curva tiende a *subir,* es decir, a medida que aumentemos x la función ($y = f(x)$) aumenta, es claro entonces que Δx y Δy tienen el mismo signo.

Analizando ahora la siguiente gráfica:

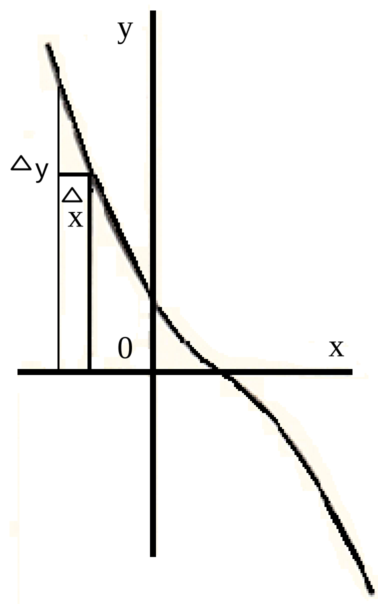

Fig. 2

Si recorremos un punto a lo largo de la curva de izquierda a derecha, la curva *baja*, vemos entonces que a medida que x aumenta la función disminuye, por lo que entonces Δx y Δy tienen signos contrarios.

Sin embargo en curvas más complejas, la función puede ser creciente en un intervalo y creciente en otro, para ilustrar esta idea grafiquemos la función.

$$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$$

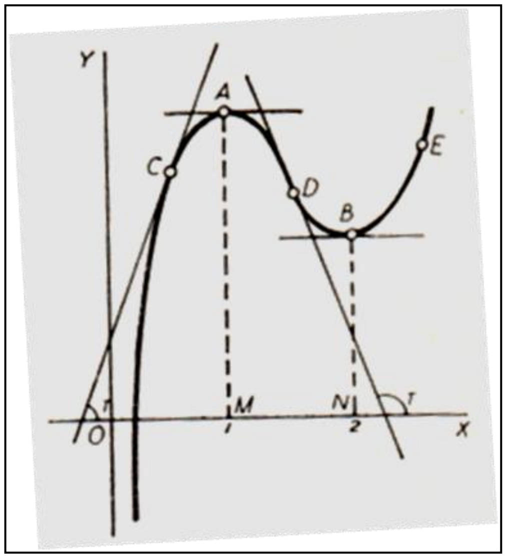

Fig. 3

Si hacemos mover un punto a lo largo de la curva de izquierda a derecha podemos observar lo siguiente, la x curva sube hasta llegar al punto A, después baja desde A hasta el punto B y después sube a la derecha del punto B. Observemos con mucho cuidado la gráfica y entendamos lo siguiente:

1. Cuando $x = -\infty$ hasta $x = 1$ *la función es creciente*

2. Cuando $x = 1$ hasta $x = 2$ *la función es decreciente*

3. Cuando $x = 2$ hasta $x = +\infty$ *la función es creciente*

Observe que en cualquier punto, como el punto C, donde la función es creciente, la tangente forma un ángulo agudo ($< 90^0$) con el eje de las x, entonces la pendiente es positiva. Si elegimos otro punto como D, donde la función es decreciente, la tangente forma un ángulo obtuso ($> 90^0$) con el eje de las x siendo entonces la pendiente negativa. Analizando lo anterior podemos establecer el siguiente criterio para investigar si una función es creciente o decreciente en un intervalo y específicamente en un punto de nuestro interés.

Una función es creciente cuando su derivada en un punto específico es positiva; y es decreciente cuando su derivada es negativa.

A modo de ejemplo derivemos la función de la gráfica especificada anteriormente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(2x^3 - 9x^2 + 12x - 3) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$$

Si escogemos un punto < 1, digamos 0 y sustituyendo en la derivada 6(0-1) (0-2)= +, entonces $f(x)$ es creciente ya que su derivada es positiva.

Si escogemos un punto para $x > 1$ pero < 2, digamos 1.5, la derivada es negativa, $f(x)$ es decreciente

Si escogemos un punto $x > 2$, digamos 3 la derivada es positiva, $f(x)$ es creciente.

Entender cuando una función es creciente y cuando es decreciente es de vital importancia, para el estudio de nuestro siguiente tema (máximos y mínimos) que es vital importancia en las aplicaciones del cálculo.

4.1. Ejercicios resueltos

1. Encuentre los intervalos en los que la función $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ es creciente o decreciente.

Empecemos por graficar la función:

x	y
0	0
1	4
2	2
3	0
4	4
5	20
-1	-16
-2	-50

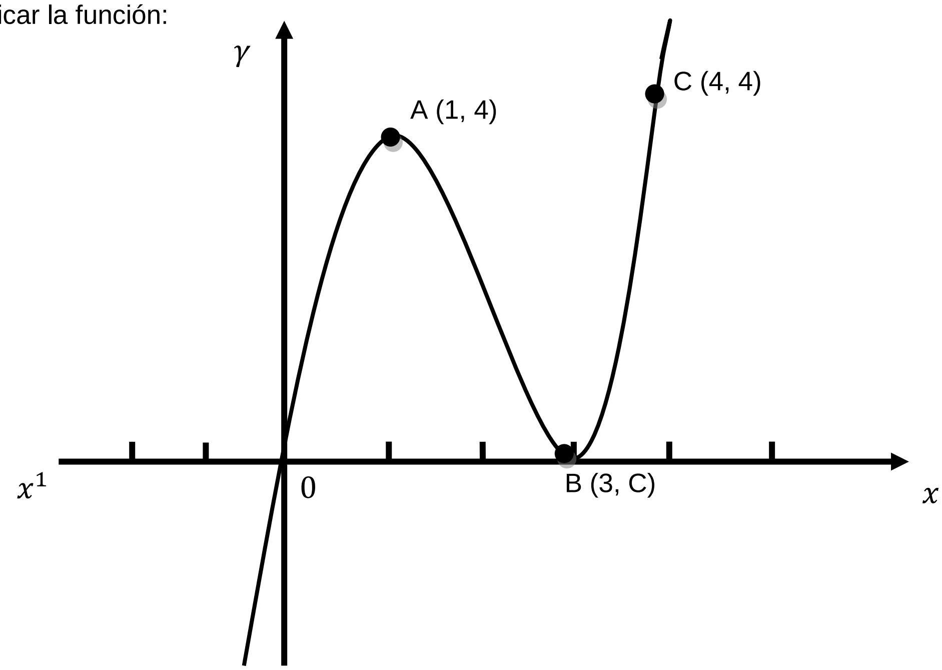

Fig. 4

Derivemos la función $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12x + 9$

Si tomamos un punto x entre cero y uno, digamos 0.5 y sustituyendo en el resultado de la derivada, tenemos:

$\frac{dy}{dx} = 3(0.5^2) - 12(0.5) + 9 = +$ por lo que la función es creciente en ese punto

Ahora tomemos otro punto en el intervalo (1,3), digamos 2, sustituyendo en la derivada tenemos:

$\frac{dy}{dx} = 3(2^2) - 12(2) + 9 = -$ por lo que la función es decreciente en ese punto

Ahora tomemos otro punto en el intervalo (3,-∞), digamos 4, sustituyendo en la derivada tenemos:

$\frac{dy}{dx} = 3(4^2) - 12(4) + 9 = +$ por lo que la función es creciente en ese punto

2. Hallar los intervalos en los cuales la función: $y = 2x^2 - x^4$ es creciente o decreciente

Grafiquemos la función:

x	0	1	2	3	- 1	- 2	- 3
y	0	1	- 8	- 63	1	- 8	- 63

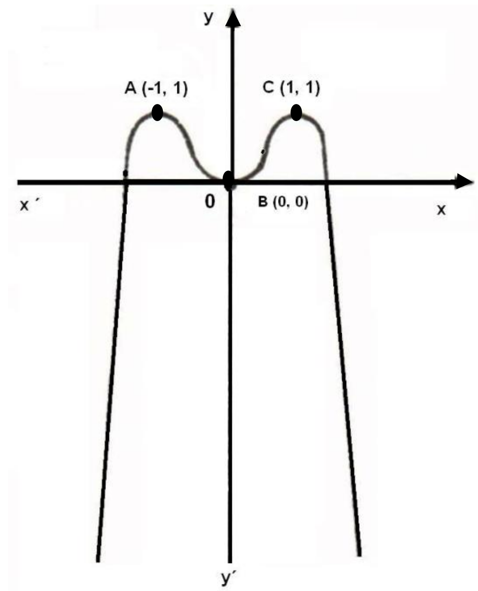

Fig. 5

Derivemos la función dada: $\frac{dy}{dx} = 4x - 4x^3$

Primero analicemos el intervalo $(-\infty, -1)$, escojamos un punto entre estos dos valores, digamos $x = -2$ y sustituyamos en la derivada.

$\frac{dy}{dx} = 4(-2) - 4(-2^3) = -8 + 32 = +$ por lo que la función es creciente en ese punto

Ahora analicemos el intervalo (-1,0), escojamos un punto entre estos valores, digamos $x = -0.5$ y sustituyamos en la derivada

$\frac{dy}{dx} = 4x - 4x^3 = 4(-0.5) - 4(-0{,}5^3) = +$ por lo que la función es creciente en ese punto

En seguida analicemos el intervalo (0,1), escojamos un punto entre estos dos valores, digamos $x = 0.5$ y sustituyamos en la derivada.

$\frac{dy}{dx} = 4x - 4x^3 = 4(0.5) - 4(0.5^3) = +$ por lo que la función es creciente en ese punto

Por último analicemos el intervalo (1,+∞), escojamos un punto entre estos valores, digamos $x = 2$ y sustituyamos en la derivada

$\frac{dy}{dx} = 4x - 4x^3 = 4(2) - 4(2^3) = -$ por lo que la función decreciente en ese punto

Si analizamos con mucho cuidado nuestros resultados y los comparamos con el comportamiento de la función en estos intervalos veremos que ambos concuerdan.

5.1. ESTRATEGIAS CENTRADAS EN EL APRENDIZAJE: Ejercicios propuestos

1. Determine los intervalos en los que las siguientes funciones son crecientes o decrecientes, trace su gráfica correspondiente.

a) $y = 2x - x^2$

b) $y = x^3 - 3x^2$

c) $y = x^4 - 4x^3 + 15$

d) $y = x^3 - 3x$

e) $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

f) $y = 3x^4 - 8x^3$

g) $y = 5 - 2x - x^2$